

Клетчатые многоугольники

Определение расстояния между клетками. Расстоянием между клетками А и В называется длина кратчайшего пути хромой ладьи из А в В.

Пример. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1.

1. Докажите, что из клетчатого многоугольника всегда можно удалить одну клетку так, что останется клетчатый многоугольник. Подсказка: рассмотрите клетку многоугольника, наиболее удаленную от фиксированной клетки многоугольника.
2. Докажите, что клетчатый многоугольник из n клеток содержит внутри себя не менее $n - 1$ единичных отрезков сетки.
3. Докажите, что периметр клетчатого многоугольника из n клеток не превосходит $2n + 2$.
4. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали клетчатый многоугольник. Докажите, что можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий ее прямоугольник того же либо меньшего периметра.
5. (Изопериметрическое неравенство) Для клетчатого многоугольника площади S и периметра P выполняется неравенство $P^2 \geq 16S$.
6. Докажите, что у клетчатого многоугольника углов, равных 90° , на 4 больше, чем углов, равных 270° .
7. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клеток и клетчатый многоугольник площади 101. Докажите, что из квадрата можно вырезать по крайней мере 4 таких многоугольника.

Дополнительные задачи

8. Квадрат со стороной 100 разрезан по линиям сетки на 100 прямоугольников одинакового периметра P . Найдите максимальное возможное значение P .
9. Докажите, что клетчатый многоугольник площади 202 можно разделить на 101 прямоугольник.
10. Докажите, что площадь S клетчатого многоугольника можно вычислить по формуле: $S = N + \frac{P}{2} - 1$, где N – количество узлов сетки, находящихся внутри этого многоугольника, а P – количество узлов, находящихся на его границе (т.е. его периметр).

Клетчатые многоугольники

Определение расстояния между клетками. Расстоянием между клетками А и В называется длина кратчайшего пути хромой ладьи из А в В.

Пример. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1.

1. Докажите, что из клетчатого многоугольника всегда можно удалить одну клетку так, что останется клетчатый многоугольник. Подсказка: рассмотрите клетку многоугольника, наиболее удаленную от фиксированной клетки многоугольника.
2. Докажите, что клетчатый многоугольник из n клеток содержит внутри себя не менее $n - 1$ единичных отрезков сетки.
3. Докажите, что периметр клетчатого многоугольника из n клеток не превосходит $2n + 2$.
4. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали клетчатый многоугольник. Докажите, что можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий ее прямоугольник того же либо меньшего периметра.
5. (Изопериметрическое неравенство) Для клетчатого многоугольника площади S и периметра P выполняется неравенство $P^2 \geq 16S$.
6. Докажите, что у клетчатого многоугольника углов, равных 90° , на 4 больше, чем углов, равных 270° .
7. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клеток и клетчатый многоугольник площади 101. Докажите, что из квадрата можно вырезать по крайней мере 4 таких многоугольника.

Дополнительные задачи

8. Квадрат со стороной 100 разрезан по линиям сетки на 100 прямоугольников одинакового периметра P . Найдите максимальное возможное значение P .
9. Докажите, что клетчатый многоугольник площади 202 можно разделить на 101 прямоугольник.
10. Докажите, что площадь S клетчатого многоугольника можно вычислить по формуле: $S = N + \frac{P}{2} - 1$, где N – количество узлов сетки, находящихся внутри этого многоугольника, а P – количество узлов, находящихся на его границе (т.е. его периметр).